

Test la MATEMATICĂ

Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z^2 - z + 1 = 0$. Să se arate că $z^4 = \frac{1}{z} - 1$.
- 5p 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{3x-1}{2x-3} \geq \frac{3-2x}{2-x}$.
- 5p 3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2}f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcția f este periodică.
- 5p 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând la întâmplare o funcție $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 3, 4\}$, $f(1)$ să fie număr par.
- 5p 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că distanța de la punctul $A(m-2, m)$ la dreapta $2x - y - 1 = 0$ este $\sqrt{5}$.
- 5p 6. Să se rezolve în intervalul $[0, 4\pi]$ ecuația $\sin(2x) + \sin(6x) = \sin(4x)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & m & \hat{1} \\ -\hat{2} & \hat{1} & m \\ m & \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$ cu elementele din $\mathbb{Z}_5$.
- 5p a) Să se determine $m \in \mathbb{Z}_5$ astfel încât $\det(A^2) = \hat{1}$.
- 5p b) Pentru $m = \hat{0}$, să se afle inversa lui A .
- 5p c) Pentru $m = \hat{0}$, să se rezolve în $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{Z}_5)$ sistemul $AX = \begin{pmatrix} -\hat{2} \\ \hat{1} \\ \hat{2} \end{pmatrix}$.
2. Fie $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Pe $\mathcal{F}$ definim operația $*$ prin
- $$f * g = f \circ g + n(g \circ f), \quad \forall f, g \in \mathcal{F},$$
- unde $n \in \mathbb{Z}$, iar $\circ$ este operația de compunere a funcțiilor.
- 5p a) Să se determine n astfel încât operația $*$ să fie comutativă.
- 5p b) Să se determine n astfel încât operația $*$ să fie asociativă.
- 5p c) Să se determine n astfel încât operația $*$ să admită element neutru. Pentru n astfel determinat, să se precizeze elementul neutru și să se afle elementele simetrizabile ale lui $\mathcal{F}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = \arctg \frac{x^2}{1+x+x^2}$ și $g(x) = f(\sqrt[3]{x})$.
- 5p a) Determinați punctele de extrem local ale funcției f .
- 5p b) Să se determine asimptotele la graficul funcției g .
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f\left(\frac{1}{1}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{n}\right) \right)$.
2. Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$, și șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin
- $$I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx, n \in \mathbb{N}.$$
- 5p a) Să se calculeze I_1 .
- 5p b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ au loc inegalitățile $10I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \leq 10I_n$.
- 5p c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = f(1)$.