Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi **Admitere - studii de licenţă**

Facultatea de Informatică **Sesiunea iulie 2023**

Barem de corectare la MATEMATICĂ

- Se acordă **10 puncte** din oficiu.
- Pentru orice soluţie corectă, chiar diferită de cea din barem, se acordă un punctaj corespunzător.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2 = z - 1$, $z^4 = (z^2)^2 = z^2 - 2z + 1 = z^2 - z + 1 - z = -z$. Deci $z^4 = -z$ (*).	**2.5p**
	$\dfrac{z^2+1-z}{z} = 0 \Rightarrow -z = \dfrac{1}{z} - 1$.	**1.5p**
	Din (*) rezultă concluzia.	**1p**
2.	$\dfrac{3x-1}{2x-3} \geq \dfrac{3-2x}{2-x} \iff \dfrac{x^2-5x+7}{(2-x)(2x-3)} \geq 0 \iff (2-x)(2x-3) > 0$.	**4p**
	Concluzie: $x \in \left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$.	**1p**
3.	$x \to x+1 \Rightarrow f(x+2) + f(x) = \sqrt{2}f(x+1) = 2f(x) - \sqrt{2}f(x-1),\ \forall x \in \mathbb{R}$.	**2p**
	Aşadar, $f(x+4) = f(x+2) - \sqrt{2}f(x+1) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.	**2p**
	Prin urmare, $f(x+8) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, deci funcţia este periodică.	**1p**
4.	Cazuri posibile: $3^3 = 27$.	**1p**
	$f(1) \to 2$ posibilităţi, $f(2) \to 3$ posibilităţi, $f(3) \to 3$ posibilităţi.	**2p**
	Deci cazuri favorabile: $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.	**1p**
	Concluzie: probabilitatea cerută este $18/27 = 2/3$.	**1p**
5.	$\text{dist}(A, dr) = \dfrac{\lvert 2(m-2) - m - 1\rvert}{\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{\lvert m-5\rvert}{\sqrt{5}}$.	**3p**
	Cum $\text{dist}(A, dr) = \sqrt{5} \Rightarrow \lvert m-5\rvert = 5$.	**1p**
	Concluzie: $m = 0$ sau $m = 10$.	**1p**
6.	$y = 2x$: este de ajuns să rezolvăm ecuaţia $\sin y + \sin(3y) = \sin(2y)$ (*) în $[0, 8\pi]$.	**0.5p**
	Avem $\sin y + \sin(3y) - \sin(2y) = 2\sin(2y)\cos y - \sin(2y) = \sin(2y)\,(2\cos(y) - 1)$.	**3p**
	Aşadar (*)$\iff$ $\sin(2y) = 0$ sau $\cos(y) = \dfrac{1}{2}$, deci $y \in \left\{\dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \{0, \ldots, 16\}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \{0,1,2,3\}\right\}$.	**1p**
	Concluzie: $x \in \left\{\dfrac{k\pi}{4} \mid k \in \{0, \ldots, 16\}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{6} + k\pi, \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \mid k \in \{0,1,2,3\}\right\}$.	**0.5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = m^3 - \hat{1}$	**2p**
	$\det(A^2) = (\det A)^2 = (m^3 - \hat{1})^2$	**1p**
	$(m^3 - \hat{1})^2 = \hat{1} \Leftrightarrow m^3 - 1 = \pm\hat{1} \Leftrightarrow m^3 \in \{\hat{0}, \hat{2}\} \Leftrightarrow m \in \{\hat{0}, \hat{3}\}$.	**2p**
b)	Pentru $m = \hat{0}$, $\det A = -\hat{1}$, iar	**1p**
	$A^* = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & -\hat{1} \\ \hat{2} & \hat{1} & -\hat{2} \\ -\hat{2} & -\hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$.	**3p**
	Concluzie: $A^{-1} = (\det A)^{-1} A^* = \begin{pmatrix} -\hat{1} & -\hat{1} & \hat{1} \\ -\hat{2} & -\hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} & -\hat{1} \end{pmatrix}$.	**1p**
c)	$X = A^{-1}(AX) = \begin{pmatrix} -\hat{1} & -\hat{1} & \hat{1} \\ -\hat{2} & -\hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} & -\hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{2} \\ \hat{1} \\ \hat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{3} \\ \hat{7} \\ -\hat{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{2} \\ \hat{2} \\ \hat{0} \end{pmatrix}$.	**5p**
2.a)	$f * g = g * f \Leftrightarrow f \circ g + n\,(g \circ f) = g \circ f + n\,(f \circ g) \Leftrightarrow (n-1)\,(g \circ f) = (n-1)\,(f \circ g)$ (*)	**2p**
	Dacă $n = 1$, relaţia (*) este evident satisfăcută pentru orice $f, g \in \mathcal{F}$.	**1p**
	Dacă $n \neq 1$, există $f, g \in \mathcal{F}$ astfel încât $g \circ f \neq f \circ g$ (de exemplu $f \equiv 0$, $g \equiv 1$).	**1p**
	Concluzia: $*$ este comutativă dacă şi numai dacă $n = 1$.	**1p**
b)	Fie $f, g \in \mathcal{F}$. Atunci $(f * g) * \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} = (n+1)\,(f \circ g + n\,(g \circ f)) = (n+1)\,(f \circ g) + n(n+1)\,(g \circ f)$, iar $f * (g * \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}) = f * ((n+1)g) = f \circ ((n+1)g) + n\,(((n+1)g) \circ f)$ $= f \circ ((n+1)g) + n(n+1)\,(g \circ f)$. Aşadar, pentru ca operaţia $*$ să fie asociativă, trebuie să avem $(n+1)\,(f \circ g) = f \circ ((n+1)g)$. Dacă în această relaţie luăm $f \equiv 1$, obţinem $n + 1 \equiv 1$, de unde $n = 0$.	**3p**
	Reciproc, dacă $n = 0$, atunci $*$ coincide cu $\circ$, care este asociativă.	**1p**
	Concluzie: $*$ este asociativă dacă şi numai dacă $n = 0$.	**1p**
c)	Dacă $n = 0$, atunci $*$ coincide cu $\circ$, iar elementul neutru este funcţia identitate $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. În plus, elementele simetrizabile ale lui $\mathcal{F}$ sunt funcţiile inversabile (sau bijective).	**1p**
	Să presupunem că $n \neq 0$. Dacă $*$ ar avea un element neutru e, atunci am avea $e * \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, adică $(n+1)e = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, de unde $n = -2$ şi $e = -\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Pe de altă parte, în acest caz ar trebui să avem şi $f * (-\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}) = (-\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}) * f$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$, adică $f \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}) = (-\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}) \circ f$, cf. calculelor de la punctul a). Dar acest lucru înseamnă că orice funcţie din $\mathcal{F}$ este impară, ceea ce este evident fals.	**3p**
	Concluzie: $*$ admite element neutru dacă şi numai dacă $n = 0$.	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Datorită faptului că funcţia arctg este strict crescătoare, punctele de extrem local sunt aceleaşi şi de acelaşi tip cu ale funcţiei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{x^2}{1+x+x^2}$.	**1p**
	Observăm că $\dfrac{1}{h(x)} = \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Prin urmare, prin acelaşi gen de raţionament, h are un punct de extrem local într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}^*$ dacă şi numai dacă x_0 este punct de extrem local pentru funcţia $\mathbb{R}^* \ni x \mapsto \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1$, adică dacă şi numai dacă $\dfrac{1}{x_0}$ este punct de extrem local pentru funcţia $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2+x+1$. Cum unicul punct de extrem local al acestei funcţii este $-\dfrac{1}{2}$ (punct de minim global), rezultă că unicul punct de extrem local al funcţiei h pe $\mathbb{R}^*$ este $x_0 = -2$ (punct de maxim global).	**2p**
	În $x_0 = 0$: cum $h(x) \geq 0 = h(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ este punct de minim global pentru h.	**1p**
	Concluzie: punctele de extrem local ale lui f sunt -2 şi 0.	**1p**
b)	Funcţia g este continuă pe $\mathbb{R}$, deci graficul funcţiei g ar putea avea asimptote doar la $\pm\infty$.	**1p**
	Avem $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(\sqrt[3]{x}) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \operatorname{arctg} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{1+x+x^2} = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$.	**3p**
	Concluzie: graficul funcţiei g are două asimptote orizontale, una în $-\infty$, una în $+\infty$, ambele de ecuaţie $y = \dfrac{\pi}{4}$.	**1p**
c)	$f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}$, deci $\operatorname{tg}\left[f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] = \dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{1+(x+1)x} = \dfrac{(x+1)-x}{1+(x+1)x}$.	**1.5p**
	Observăm analogia cu formula binecunoscută $\operatorname{tg}(u-v) = \dfrac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v}{1+\operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v}$, $u, v \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Pentru $x > 0$, luăm $u = \operatorname{arctg}(x+1)$, $v = \operatorname{arctg} x$. Evident, $u, v \in [0, \frac{\pi}{2})$, deci $\operatorname{tg}(u-v) = \dfrac{(x+1)-x}{1+(x+1)x} = \operatorname{tg}\left[f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$. Cum $0 < u-v < \dfrac{\pi}{2}$, $u - v = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Am obţinut astfel formula $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x$, $\forall x > 0$.	**2p**
	Astfel, $f\left(\dfrac{1}{1}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dots + f\left(\dfrac{1}{n}\right) = (\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1) + (\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2) + \dots +$ $+ (\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n) = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}(n+1) - \dfrac{\pi}{4}$.	**1p**
	Concluzie: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(f\left(\dfrac{1}{1}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dots + f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(n+1) - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$.	**0.5p**
2.a)	$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx - 2\int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2+1}dx$	**3p**
	$I_1 = \dfrac{1}{2}\ln 2 - 2(\operatorname{arctg}(3) - \operatorname{arctg}(2))$.	**2p**
b)	Se poate observa că $I_{n+2} + 4I_{n+1} + 5I_n = \dfrac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ $(*)$.	**2p**
	În plus, se poate arăta că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este unul descrescător: $I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in \mathbb{N}$.	**1p**
	Astfel din $(*)$ vom avea $\dfrac{1}{n+1} \leq 10I_n$, respectiv $\dfrac{1}{n+1} \geq 10I_{n+2}$.	**2p**
c)	Cum $I_{n+2} \leq \dfrac{1}{10(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow I_n \leq \dfrac{1}{10(n-1)}, \forall n \geq 2$.	**2p**
	Pe de altă parte, $I_n \geq \dfrac{1}{10(n+1)}$. Aşadar avem $\dfrac{1}{10(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{10(n-1)}, \forall n \geq 2$.	**2p**
	Înmulţind cu n şi aplicând criteriul cleştelui, vom obţine $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{10} = f(1)$.	**1p**