

Test la MATEMATICĂ

Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, modulul numărului complex $\frac{1}{1+a \cdot i} + \frac{1}{1-a \cdot i}$ este cel mult 2.
- 5p 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, $f(n) = n^2$. Arătați că $\sum_{k=1}^{2n} f(k) \leq 8 \cdot \sum_{k=1}^n f(k)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p 3. Determinați $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, știind că $\sqrt[3]{3+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{x}}$ este număr natural.
- 5p 4. Se alege la întâmplare un număr par între 1 și 99. Care este probabilitatea ca acest număr să se dividă prin 7?
- 5p 5. Fie m un număr natural impar. Arătați că dreapta $mx + y + 1 = 0$ nu poate intersecta parabola $y = x^2$ într-un punct de coordonate raționale.
- 5p 6. Să se determine $\operatorname{tg} x$, știind că $\sin 2x = \cos 2x$, unde $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p 1. Fie $\mathcal{A} = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$.
- 5p a) Arătați că $A \cdot B = A + B - I_2$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$.
- 5p b) Dovediți că $(\mathcal{A}, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +)$ sunt grupuri izomorfe.
- 5p c) Determinați $X \in \mathcal{A}$ astfel încât $X^n = A$, unde $A \in \mathcal{A}$ și $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Se consideră polinoamele $P = X^3 + 2X^2 + X + m$ și $Q = X^2 + 1$ din $\mathbb{Z}_5[X]$.
- 5p a) Să se determine câtul și restul împărțirii lui P la Q .
- 5p b) Pentru ce valori ale parametrului $m \in \mathbb{Z}_5$ polinomul P se divide prin Q ?
- 5p c) Pentru $m = 2$ să se descompună polinomul P în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^x$.
- 5p a) Arătați că $f''(x) - 2f'(x) + f(x) \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^5 + 1}$.
- 5p c) Arătați că $f^{(n)}(0)$ este număr natural pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \cos^n x$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- 5p a) Determinați o primitivă a funcției f_2 .
- 5p b) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_4(x) dx$.
- 5p c) Dacă notăm cu $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$, arătați că $n \cdot I_n = (n-1) \cdot I_{n-2}$, pentru orice $n \geq 2$.