

Test la MATEMATICĂ

Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați modulul numărului complex $\frac{1}{(1+i)^3}$.
- 5p 2. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 + 2$.
- 5p 3. Găsiți numerele reale distincte x și y pentru care este verificată egalitatea:

$$|\ln(x^2 + y^2 + 3) - 2\ln(x + y - 1)| + (9^x - 4 \cdot 3^{x+y} + 3^{2y+1})^2 = 0$$
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de două cifre, numărul ales să se dividă prin 3 sau 5.
- 5p 5. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât versorul $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ să fie ortogonal pe vectorul $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.
- 5p 6. Calculați sinusul unghiului A al triunghiului ABC , când $AB = 4$, $BC = 8$ și $CA = 6$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + my + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}, \text{ cu } m \in \mathbb{R}.$$
- 5p a) Calculați determinantul matricei sistemului.
- 5p b) Stabiliți, în funcție de m , rangul matricei sistemului.
- 5p c) Determinați valorile lui m pentru care sistemul are soluție unică și precizați-o.
2. Fie G intervalul $(-1, 1)$.
- 5p a) Arătați că, dacă $x, y \in G$, atunci $\frac{x+y}{1+xy} \in G$.
- 5p b) Demonstrați că G este grup comutativ în raport cu legea de compoziție “ $\circ$ ”, definită prin $x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}$.
- 5p c) Pentru ce valori $a \in G$, ecuația $x \circ x \circ x = a$ are soluții în $(G, \circ)$?

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = 1 - x$.
- 5p a) Calculați $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x)}{\ln^2 x}$.
- 5p b) Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $f(x) = x^n$, are o soluție unică $x_n \in (0, 1)$.
- 5p c) Demonstrați convergența șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
2. Considerăm funcția $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{x^3}, & x \in [-1, 0] \\ x^3 e^{x^2}, & x \in (0, 1] \end{cases}$.
- 5p a) Arătați că f admite primitive.
- 5p b) Calculați $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
- 5p c) Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx \right)$.