

Concursul de admitere iulie 2023

Barem

I. Algebră. Din oficiu 1 p

(a) Calculul matricei $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$ 1 p

Justificarea egalității $A^2 = 3A - 2I_2$ 1 p

Calculul lui $(I_2 - A)^2$ 0,5 p

Găsirea lui $\alpha = -1$ 0,5 p

(b) Egalitatea $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = -2I_2 + A$ și concluzia $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \in T$ 1 p

Justificarea faptului că $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \notin T$ 1 p

(c) Formularea sub forma unei propoziții a proprietății ce trebuie demonstrată și evidențierea etapelor de verificare și de demonstrație din metoda inducției matematice 0,5 p

Justificarea relației din enunț pentru $n = 1$ 0,5 p

Demonstrarea implicației $P(n) \implies P(n+1)$ 1 p

(d) Justificarea faptului că mulțimea dată este grup în raport cu înmulțirea matricelor 0,5 p

Identificarea condițiilor necesare și suficiente ca o mulțime cu două elemente să fie grup 0,5 p

Analiza cazului în care grupul conține elemente de determinant $\neq 0$ și explicitarea celor 3 grupuri cu această proprietate 0,5 p

Analiza cazului în care grupul conține elemente de determinant $= 0$ și explicitarea celor 2 grupuri cu această proprietate 0,5 p

II. Analiză. Din oficiu 1 p

(a) Calculul $f'(x) = \frac{-x^2}{1+x^2}$ pentru orice $x \in [0, \infty)$ 0,5 p

Justificarea faptului că funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ 0,5 p

Argumentarea faptului că graficul lui f nu are asimptote verticale 0,5 p

Determinarea ecuației asimptotei oblice spre $+\infty$ 0,5 p

Determinarea ecuației asimptotei oblice spre $-\infty$ 0,5 p

Argumentarea faptului că graficul lui f nu are asimptote orizontale 0,5 p

(b) Aplicarea unei metode de calcul pentru integrala $\int_0^1 xf(x)dx$ (de exemplu metoda de integrare prin părți) care să conducă la rezultat 0,5 p

Finalizarea calcului integralei $\int_0^1 xf(x)dx = \frac{3\pi - 10}{12}$ 1,5 p

(c) Demonstrarea inegalității: $\arctg(x) \leq x$, pentru $x \geq 0$ 0,5 p

Considerarea funcției $x \mapsto x - \frac{x^3}{3} - \arctg(x)$ și demonstrarea faptului că funcția definită anterior este descrescătoare 1 p

Demonstrarea inegalității: $x - \frac{x^3}{3} \leq \arctg(x)$, pentru $x \geq 0$ 0,5 p

(d) Obținerea inegalității: $\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{\sum_{k=1}^n k^3}{3n^6} \leq \sum_{k=1}^n \arctg\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$ 1 p

Enunțarea, verificarea condițiilor de aplicare a lemei cleștelui (i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{\sum_{k=1}^n k^3}{3n^6} \right) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$) 0,5 p

Concluzia: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctg\left(\frac{1}{n^2}\right) + \arctg\left(\frac{2}{n^2}\right) + \dots + \arctg\left(\frac{n}{n^2}\right) \right) = \frac{1}{2}$ 0,5 p

III. Geometrie. Din oficiu 1 p

(a) Enunțarea și folosirea regulii triunghiului sau a paralelogramului 1 p

Finalizarea obținerii relației $\vec{DN} = -\frac{3}{4}\vec{AD} + \frac{1}{4}\vec{AB}$ 1 p

Obținerea valorilor $a = \frac{1}{4}$ și $b = -\frac{1}{12}$ 1 p

(b) Rescrierea relației din enunț sub forma $\vec{PA} - \vec{PB} = \vec{PD} - \vec{PC}$ 1 p

Finalizare 1 p

(c) Enunțarea corectă a teoremei medianei 1 p

Finalizarea calculelor 1 p

(d) Ideea de folosire a teoremei cosinusului 0,5 p

Considerarea sistemului $p \cdot q = x^2 + y^2$ și $p + q = 2(x + y)$ (sau forme echivalente)

și rezolvarea lui 0,5 p

Determinarea unghiurilor $\frac{3\pi}{4}$ și $\frac{\pi}{4}$ 1 p

Orice rezolvare corectă este punctată corespunzător.