

Concursul de admitere septembrie 2022

I. Algebră. Fie $S = \{X \mid X \in M_2(\mathbb{R}) \text{ și } X^2 + X + I_2 = 0_2\}$, unde $M_2(\mathbb{R})$ este mulțimea matricelor pătratice, de ordinul 2, cu elemente numere reale, iar I_2 și 0_2 sunt matricea unitate, respectiv matricea nulă.

(a) Dacă

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

demonstrați că $A \in S$. Precizați apoi dacă matricea

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

este sau nu un element al mulțimii S .

(b) Determinați numerele reale x și y pentru care matricea

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & 1 \end{pmatrix}$$

este un element al mulțimii S .

(c) Arătați că, dacă $C \in S$, atunci $C^3 + C^2 + C = 0_2$ și $C^4 = C$.

(d) Demonstrați că, dacă $X \in S$, atunci X este matrice inversabilă și că $X^{-1} \in S$, unde X^{-1} este inversa matricei X .

II. Analiză. Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $f(x) = x^2 + 2^x + \ln(x + 1)$.

(a) Calculați $f'(x)$ pentru orice $x \in [0, \infty)$. Demonstrați că f este funcție strict crescătoare.

(b) Studiați existența asimptotelor la graficul funcției f . Demonstrați că funcția f este bijectivă.

(c) Arătați că $\int_1^2 f(x)dx = \frac{4}{3} + \ln\left(\frac{27}{4}\right) + \frac{2}{\ln 2}$.

(d) Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n)}{2^n}$.

III. Geometrie. Într-un plan raportat la un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 1)$, $B(1, -3)$ și $O(0, 0)$.

(a) Calculați lungimile laturilor triunghiului OAB .

(b) Demonstrați că triunghiul OAB este dreptunghic, apoi determinați raza cercului circumscris triunghiului OAB precum și coordonatele centrului acestui cerc.

(c) Fie punctul $C(5, 2)$. Demonstrați că aria triunghiului ABC este egală cu 3 și că centrul de greutate al triunghiului ABC se află pe axa Ox . Determinați apoi toate punctele $P(x, y)$ pentru care aria triunghiului ABP este egală cu 3 iar centrul de greutate al triunghiului ABP se află pe axa Ox .

(d) Fie d dreapta de ecuație $x - y = 0$. Determinați punctele $M(x, y)$ situate pe d pentru care suma distanțelor de la M la punctele A și B (adică $MA + MB$) este minimă.