

Concursul de admitere iulie 2019
Domeniul de licență - *Matematică*

I. Algebră. Considerăm polinomul $P(X) = (X + i)^{12} + (X - i)^{12}$.

- (a) Calculați $P(0)$.
- (b) Arătați că suma pătratelor rădăcinilor polinomului P este 132.
- (c) Demonstrați că numărul $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{24})$ este o rădăcină a lui P .
- (d) Demonstrați că toate rădăcinile polinomului P sunt reale.
- (e) Fie $Q = (X + i)^{12} + m(X - i)^{12}$, unde m este un număr complex. Demonstrați că polinomul Q are (cel puțin) o rădăcină reală dacă și numai dacă $|m| = 1$.

II. Analiză. Fie funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Calculați $f(\frac{\pi}{2}) + f(\pi)$.
- (b) Demonstrați că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și determinați asimptotele la graficul funcției f .
- (c) Arătați că funcția f are exact 3 puncte de extrem local în intervalul $(-2\pi, 2\pi)$.
- (d) Calculați $\int_0^\pi x^3 f^2(x) dx$.
- (e) Pentru orice număr natural $n \geq 1$, notăm $I_n = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(x) dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_n$ este strict monoton și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

III. Geometrie. În planul de coordonate xOy fie punctele $A(1, 1)$, $B(-1, 3)$, $C(-a - 1, a + 5)$, $D(-a + 1, a + 3)$, unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru.

- (a) Arătați că, pentru orice valoare a parametrului a , punctele C și D se află pe dreapta de ecuație $x + y - 4 = 0$.
- (b) Demonstrați că pentru orice valoare a lui a , punctele A, B, C, D determină un paralelogram și calculați aria acestuia.
- (c) Fie $a = 0$. Considerăm B' simetricul lui B în raport cu C și punctele M și N astfel ca $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Determinați λ astfel încât vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{MB'}$ să fie coliniari.
- (d) Fie $a = 0$. Notăm cu A_1 proiecția lui A pe CD și cu C_1 proiecția lui C pe AB . Demonstrați că dreptele A_1C_1 , AC și BD au un punct comun. Justificați dacă proprietatea rămâne valabilă pentru o valoare oarecare a lui a .
- (e) Pentru ce valoare a lui a perimetrul paralelogramului $ABCD$ este minim? Justificați!

Subiectul de Informatică se găsește pe verso.

IV. Informatică

Fie v un tablou unidimensional format din n numere naturale nenule ($n \geq 2$). Singura operație permisă asupra unui element al tabloului v constă în înlocuirea sa cu cel mai mare divizor comun dintre el și vecinul său din stânga sau vecinul său din dreapta, oricare dintre aceștia există. Scrieți un program care primește la intrare numărul n și cele n elemente ale tabloului v , iar apoi determină și afișează numărul minim de înlocuiri de tipul precizat, necesare pentru ca toate elementele tabloului să devină egale cu 1 sau mesajul "Imposibil" în cazul în care acest lucru nu se poate realiza.

Exemple:

Date de intrare	Date de ieșire	Observații
$n = 5$ $v = (2, 6, 3, 1, 5)$	4	Numărul minim de operații de înlocuire necesare este 4 și se poate obține, de exemplu, astfel: • înlocuim 3 cu $\text{cmmdc}(3,1)=1$, deci $v = (2, 6, 1, 1, 5)$ • înlocuim 6 cu $\text{cmmdc}(6,1)=1$, deci $v = (2, 1, 1, 1, 5)$ • înlocuim 2 cu $\text{cmmdc}(2,1)=1$, deci $v = (1, 1, 1, 1, 5)$ • înlocuim 5 cu $\text{cmmdc}(5,1)=1$, deci $v = (1, 1, 1, 1, 1)$
$n = 5$ $v = (3, 15, 5, 5, 10)$	6	Numărul minim de operații de înlocuire necesare este 6 și se poate obține, de exemplu, astfel: • înlocuim 15 cu $\text{cmmdc}(3,15)=3$, deci $v = (3, 3, 5, 5, 10)$ • înlocuim al doilea 3 cu $\text{cmmdc}(3,5)=1$, deci $v = (3, 1, 5, 5, 10)$ • înlocuim primul 5 cu $\text{cmmdc}(1,5)=1$, deci $v = (3, 1, 1, 5, 10)$ • înlocuim 5 cu $\text{cmmdc}(1,5)=1$, deci $v = (3, 1, 1, 1, 10)$ • înlocuim 10 cu $\text{cmmdc}(1,10)=1$, deci $v = (3, 1, 1, 1, 1)$ • înlocuim 3 cu $\text{cmmdc}(3,1)=1$, deci $v = (1, 1, 1, 1, 1)$

Note:

1. Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C sau C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sale sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive și a instrucțiunilor condiționale.
2. Programele vor folosi doar instrucțiunile de bază ale limbajului de programare ales și funcții din biblioteci pentru citirea și scrierea datelor.
3. Citirea datelor se poate face de la tastatură sau dintr-un fișier text. Afișarea se va face doar pe monitor.
4. Se va considera că datele de intrare ale programelor sunt oricât de mari, dar fără a pune probleme de reprezentare în memorie cu ajutorul tipurilor de date standard.

Timp total de lucru: 3 ore