

Concursul de admitere iulie 2019
Domeniul de licență – *Informatică*

I. Algebră. Așezăm succesiv toate numerele naturale impare într-un triunghi, astfel:

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
.....

(Așezarea numerelor continuă în mod analog. În această așezare, linia a treia a triunghiului este deci cea care conține numerele 7, 9 și 11.)

- (a) Cu ce număr începe a 15-a linie a triunghiului?
- (b) Pe ce linie a triunghiului se află numărul 501?
- (c) Arătați că, pentru orice $n \geq 1$, suma tuturor numerelor de pe linia n a triunghiului este cub perfect.
- (d) Demonstrați că, oricum am alege două numere diferite de pe o aceeași linie a triunghiului de mai sus, ele nu se divid unul pe celălalt.
- (e) Polinomul P are grad m (unde $m \geq 1$), iar coeficienții săi sunt (într-o ordine oarecare) toate numerele din linia $m + 1$ a triunghiului de mai sus. Demonstrați că, dacă t este o rădăcină întreagă a polinomului P , atunci $t = -1$.

II. Analiză. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|\ln x|}{x}$.

- (a) Comparați numerele $f(e)$ și $f(e^2)$.
- (b) Determinați punctele din intervalul $(0, \infty)$ în care funcția f nu este derivabilă și stabiliți intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției f .
- (c) Discutați, în funcție de valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$, numărul de soluții reale ale ecuației $f(x) = m$.
- (d) Calculați $\int_1^e (f(x))^2 dx$.
- (e) Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad n , cu $n \geq 2$. Știm că mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $P(f(x)) = 0$ are exact $3n - 1$ elemente. Demonstrați că $P(-1) \cdot P'(\frac{1}{e}) \neq 0$.

III. Geometrie. În planul de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 5)$, $B(-1, -1)$, $C(7, 3)$ și dreapta d de ecuație $d : x - 2y - 6 = 0$. Fie punctele B' și C' date de $\{B'\} = BA \cap d$ și $\{C'\} = CA \cap d$.

- (a) Demonstrați că dreptele BC și d sunt paralele.
- (b) Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.
- (c) Determinați numerele reale α și β pentru care are loc relația $\overrightarrow{B'C'} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$.
- (d) Arătați că triunghiurile $B'BC$ și $C'CB$ au arii egale.
- (e) Fie δ o dreaptă arbitrară din plan care nu coincide cu niciuna dintre dreptele AB , AC , BC , $B'C'$, $B'C$, BC' . Considerăm mulțimea $\mathcal{M}_\delta$ a punctelor de intersecție dintre δ și cele șase drepte enumerate. Justificați care este numărul maxim posibil și care este numărul minim posibil de elemente ale lui $\mathcal{M}_\delta$.

Subiectul de Informatică se găsește pe verso.

IV. Informatică

Suntem în anul 2050. Resursele de apă de pe planeta noastră sunt limitate din cauza schimbărilor climatice. Ca aspirant la statutul de membru FMI (Formațiunea pentru Mediu Înconjurător) prima voastră sarcină este de a rezolva două probleme de distribuire a resurselor de apă către principalele orașe ale planetei.

a. Prima problemă pe care trebuie să o rezolvați este determinarea capacității maxime de stocare a apei a unui oraș. Sistemul de stocare al unui oraș a evoluat în timp, ajungându-se la o configurație flexibilă formată din n pereți verticali paraleli $p_1, p_2, \dots, p_n$. Fiecare perete p_i are forma unui dreptunghi cu înălțimea a_i și lățimea de 1 km, iar oricare doi pereți alăturați p_i, p_{i+1} se află la distanța de 1 km, față în față. Fiecare dintre acești pereți poate fi coborât complet, prin culisare pe verticală, iar un bazin poate fi format din oricare doi pereți p_i, p_j (rămăși după coborârea tuturor celorlalți) și din pereți laterali, care întregesc conturul de bazin. Capacitatea unui bazin este dată de produsul dintre înălțimea peretelui celui mai mic dintre cei doi p_i, p_j din care este format bazinul și distanța dintre acești doi pereți. Sistemul de stocare poate fi descris de un șir de numere naturale $a_1, a_2, \dots, a_n$ strict pozitive, unde a_i reprezintă înălțimea în kilometri a peretelui p_i , a_2 reprezintă înălțimea în kilometri a peretelui p_2 și așa mai departe. Scrieți un program care primește la intrare numărul de pereți $n \geq 2$ și înălțimile acestora $a_1, a_2, \dots, a_n$, iar apoi determină și afișează capacitatea maximă de apă care poate fi stocată în acel oraș.

Exemplu:

Date de intrare	Date de ieșire	Observații
$n = 9$ $a = [1, 8, 6, 2, 5, 4, 8, 3, 7]$	49	Peretele al doilea de înălțime 8 km și cel de-al nouălea de înălțime 7 km rămân ridicați (toți ceilalți fiind coborâți), ei determinând astfel bazinul de capacitate maximă care poate reține 49 km ³ de apă.

b. Pentru ca toți locuitorii unui oraș să supraviețuiască în cazul unei catastrofe, orașul trebuie să aibă o rezervă de cel puțin 1 km³ de apă. Pentru a face față mai ușor unor catastrofe, orașele pot forma alianțe în care se pot împrumuta reciproc cu apă. Astfel, într-o alianță formată din h orașe, fiecare oraș trebuie să aibă o rezervă de cel puțin h km³ de apă (pentru a putea supraviețui toți locuitorii săi și a putea să împrumute cu câte 1 km³ de apă fiecare dintre celelalte $h - 1$ orașe aliate). Cea de-a doua problemă a voastră este de a determina cel mai mare număr de orașe h care se pot alia. Fiind dat numărul m de orașe și un șir de m numere naturale strict pozitive, notate cu $c_1, c_2, \dots, c_m$, unde fiecare număr c_i reprezintă capacitatea maximă de stocare a orașului i , să se determine numărul maxim de orașe h care pot forma o alianță, adică există cel puțin h orașe care pot reține fiecare o cantitate de apă cel puțin egală cu h km³. Scrieți un program, cu o complexitate de timp cât mai bună, care primește la intrare numărul natural $m \geq 1$ și șirul de numere $c_1, c_2, \dots, c_m$, după care determină și afișează numărul h . Specificați și justificați complexitatea algoritmului propus.

Exemplu:

Date de intrare	Date de ieșire	Observații
$m = 5$ $c = [3, 1, 6, 1, 5]$	3	Avem 5 orașe care pot reține cantitățile de apă 3, 1, 6, 1 și 5. Sunt cel puțin 3 orașe care pot reține o cantitate de apă mai mare sau egală cu 3, dar nu există 4 orașe care pot reține o cantitate de apă mai mare sau egală cu 4.

Note:

1. Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C sau C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sale sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive și a instrucțiunilor condiționale.
2. Programele vor folosi doar instrucțiunile de bază ale limbajului de programare ales și funcții din biblioteci pentru citirea și scrierea datelor.
3. Citirea datelor se poate face de la tastatură sau dintr-un fișier text. Afișarea se va face doar pe monitor.
4. Se va considera că datele de intrare ale programelor sunt oricât de mari, dar fără a pune probleme de reprezentare în memorie cu ajutorul tipurilor de date standard.

Timp total de lucru: 3 ore